

КРАЕВОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ СРЕДНЕГО ПРО-
ФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАМЧАТСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

«РАССМОТРЕНО»

На методическом
совете

Протокол №1 от

«_09_»_09_2013 г.

«СОГЛАСОВАНО»

Зам. директора по УВР

Мав / О.Н.Маркеленкова /

«_10_»_09_2013 г.

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор

Арт / Ю.Полторная /

«_14_»_09_2013 г.



ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКИ»

Класс: 7

Срок реализации: 1 год

Разработчик программы:

Обухова Ирина Степановна,
преподаватель математики

Петропавловск-Камчатский
2013 год

Пояснительная записка

Направленность данной дополнительной образовательной программы – естественно - научная.

Новизна образовательной программы заключается в том, что учебная дисциплина «Теория вероятности и статистики» в 7–9 классах основной школы предполагает пропедевтику основных понятий, знакомство на наглядном, интуитивном уровне с вероятностно-статистическими закономерностями, построение и изучение базовых вероятностно-статистических моделей.

Актуальность дополнительной образовательной программы состоит в том, что она поддерживает изучение основного курса, направлена на систематизацию, расширение и повторение знаний учащихся. Предлагаемая учебная дисциплина «Теория вероятности и статистики» в 7–9 классах основной школы предполагает пропедевтику основных понятий, знакомство на наглядном, интуитивном уровне с вероятностно-статистическими закономерностями, построение и изучение базовых вероятностно-статистических моделей. Поэтому данная программа будет способствовать совершенствованию и развитию математических знаний и умений учащихся. Актуальность курса обусловлена его практической значимостью.

Педагогическая целесообразность. Наглядность и простота изложения, подчеркнутая ясность и простота формулировок большинства задач, проведение небольших практических исследований (измерений) и экспериментов для лучшего понимания природы случайной изменчивости и смысла вероятности должны способствовать усвоению простых, но принципиально новых для учащихся понятий, росту интереса учащихся к математике в целом, формированию современного мировоззрения и умения ориентироваться в изменчивом информационном мире.

Цель данного курса:

- освоение системы знаний по теории вероятности и статистике, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования;
- интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, пространственных представлений, способность для преодоления трудностей;
- формирование представлений об идеях и методах математики как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов;
- воспитание культуры личности, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры, понимания значимости этих дисциплин для научно-технического прогресса.

Задачи:

- изучить оригинальные приемы решения заданий;
- развивать исследовательские компетенции в решении математических задач;
- повысить интерес к предмету.

Отличительные особенности данной программы:

Каждый раздел курса строится так, чтобы в нем содержались основные теоретические сведения, задания обучающего и контролирующего характера, проверочные работы по теме, нестандартные задачи для интересующихся предметом. Одни задания предполагают выбор ответа, другие краткого, а третьи подробного решения.

Возраст детей, на который рассчитана образовательная программа – 7 класс.

Срок реализации - 1 год.

Формы и режим занятий:

Занятия проводятся дистанционно, 1 раз в неделю. Основные формы организации учебных занятий:

- лекции;
- практические занятия;
- тестирования;
- самостоятельные работы.

Основной тип занятий – комбинированный. Каждая тема курса начинается с постановки задачи. Теоретический материал излагается в форме мини-лекции. После изучения теоретического материала выполняются практические задания для его закрепления. Большое внимание уделяется решению задач, как качественных, так и вычислительных; очень много задач прикладного характера, встречающихся в производстве (например, задачи на контроль качества, расчет объемов выборки деталей). Также предлагаются экономические, комбинаторные и статистические задачи. Вообще говоря, решение задач – основа успешного освоения и закрепления каждой темы, т.к. исторически теория вероятностей родилась и развивалась из задач, которые встречались в азартных играх, и в начальных экономических дисциплинах. Поэтому большое внимание уделяется истории зарождения и развития науки о случайных величинах. Учащимся интересно по-новому взглянуть на известных ученых таких, как Б. Паскаль, П.Ферма, П.Лаплас, Я.Бернулли и др.

Учащиеся знакомятся с элементами математической статистики, методами обработки различных данных; осознают, что многие процессы в нашей жизни подчиняются статистическим законам, которые им под силу самим исследовать.

Уделяется внимание развитию учащихся, пробуждению интереса к предмету. Важно, чтобы ученики поверили в свои силы, испытали успех в учебе. В этом большую помощь окажет применение современных компьютерных средств, в том числе компьютерной среды «Живая Математика».

Ожидаемые результаты:

На основе поставленных задач предполагается, что учащиеся достигнут следующих результатов:

- уметь уверенно вводить и искать нужную информацию в таблице;
- выполнять элементарные вычисления по табличным данным и заносить результаты в соответствующие ячейки таблицы;
- уметь строить столбчатые и круговые диаграммы по имеющимся данным;
- понимать, что столбчатые диаграммы удобнее применять для изображения абсолютных величин, а круговые – для изображения долей целого;
- знать, что такое среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения набора чисел, уметь их вычислять;
- понимать, что большинство реальных физических величин подвержено случайной изменчивости;
- уметь указывать приблизительно меру точности измерения масс различных величин и обосновывать свою точку зрения;
- уметь приводить примеры случайных событий;
- знать, что такое частота события, что при увеличении числа опытов частота приближается к вероятности.

Способы определения результативности обучения:

В ходе обучения периодически проводятся непродолжительные контрольные работы и тестовые испытания для определения глубины знаний и скорости выполнения заданий. Контрольные замеры обеспечивают эффективную обратную связь, позволяющую обучающим и обучающимся корректировать свою деятельность. Текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется по результатам выполнения учащимися самостоятельных, практических работ. Присутствует как качественная, так и количественная оценка деятельности.

Качественная оценка базируется на анализе уровня мотивации учащихся, их общественном поведении, самостоятельности в организации учебного труда, а так же оценке уровня адаптации к предложенной жизненной ситуации..

Количественная оценка предназначена для снабжения учащихся объективной информацией об овладении ими учебным материалом и производится по пятибалльной системе.

Формы подведения итогов реализации дополнительной образовательной программы:

- зачетная работа;
- тестирования;
- творческие работы;

Учебно-тематический план

№ Урока	Тема занятия	Теория	Практика
Модуль 1. Вероятность (17 часов)			
1	Введение в курс вопросов теории вероятностей	1	
2	Что вероятнее? Сравнение шансов.	1	
3	События, операции над ними.	1	
4	Как сравнивать события.	1	
5	Задачи на сравнение событий.		1
6	Вероятность и её свойства. Классическое определение вероятности.	1	
7	Условная вероятность.	1	
8	Случайные величины.	1	
9	Эксперименты со случаем. Частота абсолютная и относительная.		1
10	Задачи на эксперименты со случаем.		1
11	Независимые случайные величины.	1	
12	Функции случайных величин.	1	
13	Элементарные события.	1	
14	Диаграммы распределения событий.	1	
15	Решение задач на вероятность.		1
16	Обобщающее занятие по теме «Вероятность»		1
17	Контролирующий тест по теме «Вероятности»		1
Модуль 2. Статистика (18 часов)			
18	Предмет и задачи статистики	1	
19	Среднее значение.		1
20	Медиана.		1
21	Наибольшее и наименьшее значения. Размах	1	
22	Решение задач на статистические характеристики.		1
23	Решение задач на статистические характеристики.		1
24	Самостоятельная работа «Статистические характеристики»		1
25	Правило умножения.	1	
26	Правило сложения.	1	
27	Решение задач на применение правил умножения и сложения.		1
28	Перестановки.	1	
29	Размещения.	1	
30	Сочетания.	1	
31	Полигоны частот.	1	

32	Решение задач на построение диаграмм.		1
33	Обобщающий урок по теме «Статистика»		1
34	Контролирующий тест по теме «Статистика»		1
35	Итоговый урок		1

Содержание учебной дисциплины

Данная программа курса по выбору «Теория вероятности и статистики» составлена на основе федерального компонента государственного стандарта основного образования.

Образовательная программа базируется на учебном пособии, написанном авторским коллективом под руководством профессора Ю.Н. Тюрина. Это пособие объединяет весь материал, относящийся к темам теории вероятностей и статистики для изучения в школе. Пособие можно разбить на два больших раздела:

- вероятность
- статистика

Раздел «Статистика» посвящен представлению данных, описательной статистике и понятию изменчивости и изменчивых величин. Этот материал предполагается для изучения в 7 классе при трехгодичном планировании материала. Тема «Введение в теорию вероятностей», посвященная интуитивным представлениям о случайном событии и его вероятности, а также математическому описанию случайных явлений, также рассматривается в 7 классе. Эта тема логически вытекает из предшествующей ей темы случайной изменчивости и закладывает основу для дальнейшего более обстоятельного обсуждения сложных понятий теории вероятностей в последующих классах.

В разделе «Вероятности» излагаются основы теории вероятностей и элементы комбинаторики, необходимые для вычисления вероятностей в случае равновероятных элементарных событий. Часть этого материала изучается в седьмом классе при любом варианте трехгодичного планирования, а остальные главы в 8 классе. Особое место в разделе «Вероятности» занимает глава «Геометрические вероятности». Она рассматривается как повторение в несколько иной форме тем главы «Вероятности случайных событий. Сложение и умножение вероятностей».

Методическое обеспечение программы:

Интернет

Персональный компьютер

Компьютерная среда «Живая математика»

Дидактические и лекционные материалы основаны на литературе, указанной ниже.

Рекомендуемая литература

1. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Теория вероятностей и статистика. Учебное пособие для учителей. М.: изд-во МЦНМО МИОО, 2005.
2. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика. Учебное пособие для 5-9 классов общеобразовательных учреждений. М.: изд-во «Дрофа», 2006.
3. Ткачева М.В., Федорова И.Е. Элементы статистики и вероятность. М.: изд-во «Просвещение», 2007.
4. Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятности. Статистическая обработка данных. М.: изд-во «Мнемозина», 2006.

Задачи по теории вероятностей

1. Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово “математика”?

2. n книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Какова вероятность, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?

3. У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи по-следовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти

вероятность того, что нужный ключ появится при k -м извлечении.

4. Числа $1, 2, \dots, n$ расставлены случайным образом. Предполагая, что различные расположения

чисел равновероятны, найти вероятность того, что числа $1, 2, 3$ расположены в порядке возрастания, но не обязательно рядом.

5. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад извлекаются 6 карт. Какова вероятность, что:

а) среди них окажется туз пик;

б) среди них окажется ровно один туз;

в) среди них окажутся ровно две бубновые карты;

г) среди них окажется хотя бы одна бубновая карта?

6. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Некто приобретает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.

7. В зрительном зале кинотеатра 500 мест. Какова вероятность, что при произвольном размещении в зале 490 зрителей пустыми останутся 10 первых мест второго ряда?

8. Из колоды, насчитывающей 52 карты, наугад извлекают 6 карт. Какова вероятность, что среди них будут представители всех четырех мастей?

9. В лифт восьмизэтажного дома на первом этаже входят 5 человек. Независимо от других каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность, что а) все выйдут на четвертом этаже; б) все пятеро выйдут на одном и том же этаже; в) все пятеро выйдут на разных этажах?

10. Из чисел $1, 2, \dots, 49$ наугад выбираются и фиксируются 6 чисел, считающиеся выигрышными. Некто, желающий выиграть, наугад называет свои 6 чисел из 49. Какова вероятность, что среди названных им чисел окажется не менее трех выигрышных?

11. На шахматную доску из 64 клеток ставятся наудачу две ладьи разного цвета. С какой вероятностью они не будут “бить” друг друга?

12. Группа, состоящая из $2n$ девушек и $2n$ юношей, делится произвольным образом на две равные по количеству подгруппы. Найти вероятность того, что в каждой подгруппе окажется поровну юношей и девушек.

13. В купейный вагон (9 купе по 4 места) семи пассажирам продано семь билетов. Найти вероятность того, что занятыми оказались только два купе.

14. n различных шаров произвольным образом раскладываются по n ящикам. Какова вероятность, что при этом ровно один ящик окажется пустым?

15. В чулане находятся n пар ботинок, все пары разных фасонов. Наугад в темноте выбирают m ботинок. Какова вероятность, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные?

16. Отрезок длины l ломается в произвольной точке. Какова вероятность, что длина наибольшего обломка превосходит $2l/3$?

17. Пусть событие A не зависит от самого себя. Доказать, что тогда $P(A)$ равно 0 или 1.

18. Пусть e_1 и e_2 равны соответственно первым двум цифрам после запятой в задаче 22. Доказать, что события $\{e_1 = 3\}$ и $\{e_2 = 5\}$ независимы.

19. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0.6, стрелок B — с вероятностью 0.5, стрелок C — с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп по мишени. Какова вероятность, что ровно две пули попали в цель?

20. События A_1, \dots, A_n независимы, известны вероятности $p_i = P(A_i), i = 1, \dots, n$. Найти вероятность того, что:

- а) произойдет ровно одно из A_i ;
- б) не произойдет ни одно из A_i ;
- в) произойдет хотя бы одно из A_i .

21. Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым получит герб. Найти вероятность того, что игра закончится на k -м бросании. Какова вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру?

22. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8?

23. 10 любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 5 рыбаков расположатся на расстоянии более 200 м от берега?

24. Шахматисты А и В решили сыграть между собой матч. Известно, что А выигрывает каждую партию у В с вероятностью $2/3$ и с вероятностью $1/3$ проигрывает. В связи с этим для победы в

матче А ему нужно набрать 4 очка, а В для победы достаточно набрать 2 очка (за выигрыш в партии дается очко, за проигрыш - 0 очков, ничьих нет). Равны ли шансы на успех?

25. Чтобы найти нужную книгу, студент решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки

одинаково вероятно, есть в фондах эта книга или нет, и если книга есть в фондах, то с вероятностью 0.5 она не занята другим читателем. Какова вероятность того, что студент найдет книгу, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

26. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в

урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть из второй урны белый шар.

27. Из n экзаменационных билетов студент знает m , поэтому, если он зайдет первым на экзамен, то с вероятностью m/n он вытащит "хороший" билет. Какова вероятность вытащить "хороший" билет, если студент зайдет на экзамен вторым?

28. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 5% телевизоров со скрытым дефектом, второго - 3% и третьего - 1%. Какова вероятность приобрести

исправный телевизор, если в магазин поступило 20% телевизоров с первого завода, 30% - со второго и 50% - с третьего?

29. Известно, что 34% людей имеют первую группу крови, 37% - вторую, 21% - третью и 8% -

четвертую. Больному с первой группой можно переливать только кровь первой группы, со второй -

кровь первой и второй групп, с третьей - кровь первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?

30. Предположим, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин - дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что это мужчина? Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.

31. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0.515. Какова вероятность того, что среди 10 тыс. новорожденных окажется мальчиков не больше, чем девочек?

32. Для лица, дожившего до двадцатилетнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни

равна 0.006. Застрахована группа 10000 лиц 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный

внес 1200 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного родственникам выплачивается 100000 рублей. Какова вероятность того, что:

а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;

б) его доход превысит 6000000 рублей?

Какой минимальный страховой взнос следует учредить, чтобы в тех же условиях с вероятностью 0.95 доход был не менее 4000000 рублей?

31. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700.

Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

КОМБИНАТОРИКА

Часто приходится иметь дело с задачами выбора элементов из некоторой совокупности и расположения этих элементов в определенном порядке. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют комбинаторными задачами. Роль таких задач важна не только в математике, но и физике, химии, биологии, технике и экономике. Комбинаторные задачи приходится рассматривать при определении наиболее выгодных коммуникаций внутри города, при организации автоматической телефонной связи, при выявлении связей внутри сложных молекул, генетического кода, математической статистики и т. д.

Трудно переоценить значимость той роли, которую играет обучение методам решения комбинаторных задач в общеобразовательной школе. Освоение методов решения таких задач способствует развитию умственных способностей и математического кругозора ученика. Комбинаторные задачи несут широкие возможности для способов решения таких задач, которые могут служить как формы общих методов решения задач.

1. Правило суммы

Для ознакомления первого правила комбинаторики-правила суммы мы предлагаем разбор следующей задачи:

Задача 1. На столе лежат 3 черных и 5 красных карандашей. Сколькими способами можно выбрать карандаш любого цвета?

Решение: Выбрать карандаш любого цвета можно $5+3=8$ способами.

Правило суммы в комбинаторике:

Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b — n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элементов b , то выбор « a или b » можно сделать $m+n$ способами.

Задача 2. В классе 10 учащихся занимаются спортом, остальные 6 учащихся посещают танцевальный кружок. 1) Сколько пар учащихся можно выбрать так, чтобы один из пары был спортсменом, другой танцором? 2) Сколько возможностей выбора одного ученика?

Решение: 1) Возможность выбора спортсменов 10, а на каждого из 10 спортсменов выборов танцора 6. Значит, возможность выбора пар танцора и спортсмена $10 \cdot 6 = 60$.

2) Возможность выбора одного ученика $10+6=16$.

2. Правило произведения

Рассмотрим решение задачи, через которое сформулируем новое правило – правило произведения, неоднократно используемое при изучении последующего материала.

Задача 1. Из города А в город В ведут 3 дороги. А из города В в город С ведут 4 дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С?

Решение: Можно рассуждать таким образом: для каждой из трех путей из А в В имеется четыре способа выбора дороги из В в С. Всего различных путей из А в С равно произведению $3 \cdot 4$, т.е. 12.

Правило произведения:

Пусть нужно выбрать k элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, второй – n_2 способами и т. д., то число способов k элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Задача 2. В школьной столовой имеются 2 первых, 5 вторых и 4 третьих блюд. Сколькими способами ученик может выбрать обед, состоящий из первых, вторых и третьих блюд?

Решение: Первое блюдо можно выбрать 2 способами. Для каждого выбора первого блюда существует 5 вторых блюд. Первые два блюда можно выбрать $2 \cdot 5 = 10$ способами. И, наконец, для каждой 10 этих выборов имеются четыре возможности выбора третьего блюда, т. е. Существует $2 \cdot 5 \cdot 4$ способов составления обеда из трех блюд. Итак, обед может быть составлен 40 способами.

3. Перестановки

Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются перестановки.

Рассмотрим на примере перестановку без повторений.

Задача: На полке лежат 3 книги. В каком порядке можно расставить эти книги?

Решение: Обозначим их буквами а, в, с. Эти книги можно расставить на полке по – разному:

авс, асв, вас, вса, сав, сва.

Каждое из этих расположений называют перестановкой из трех элементов. При решении этой задачи можно воспользоваться правилом умножения. Выбор первого места на полке три. Для каждого выбора первого места есть две возможности выбора второго места. Из трех книг один выбран для первого места. Остаются 2 остальные книги. Наконец, для каждого выбора первых, вторых мест только один выбор третьего места.

Определение: *Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.*

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n .

Пусть мы имеем n элементов. На первое место можно поставить любой из них всего n выборов. На второе место любой из оставшихся, т. е. $n-1$ выбор. На третьем месте любой из оставшихся после первых двух выборов, т. е. $n-2$ выбора и т. д. В результате получим:
 $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Если произведение обозначим $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$, то число всевозможных перестановок из k элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Задачи:

1. *Сколькими способами можно расставить 7 бегунов на 7 дорожках?*

Решение: $P_7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ Ответ: 5040 способов.

2. *Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если цифры не повторяются?*

Решение: Так как натуральное число не может начинаться с цифры 0, исключаем те числа, которые начинаются с цифры 0. Количество таких чисел

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$P_5 - P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 120 - 24 = 96$$
 Ответ: 96 чисел.

3. *На собрание пришли 3 девочки и 4 мальчика. Сколькими способами можно их рассадить, если девочки хотят сидеть рядом?*

Решение: Если рассмотреть девочек как одну, всего перестановок будет P_5 . В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_3 перестановок девочек. Искомое число перестановок:

$$P_5 \cdot P_3 = 5! \cdot 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 720 \quad \text{Ответ: } 720 \text{ способов.}$$

4. Размещения

Задача: Даны четыре различных шара: белый, зеленый, красный и синий. Их нужно поместить в 3 пустые ячейки. Сколько всего будет способов размещения шаров?

Решение: Сначала выпишем все варианты, которые начинаются с белого шара, затем – с зеленого и т. д.

бзк, бкз, бзс, бсз, бкс, бск.

збк, зкб, зсб, збс, зкс, зск.

кбз, кзб, ксб, кбс, кзс, ксз.

сбз, сзб, скб, сбк, скз, сзк.

Всего способов 24. В первую ячейку можно выбрать четырьмя способами. Во вторую – тремя, в третью – двумя. Всего способов $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Каждую упорядоченную тройку, которую можно составить из четырех элементов, называют размещением из четырех элементов по три.

Определение: *Размещением из n элементов по k ($k \leq n$) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.*

Каждое множество при размещении отличается порядком элементов или их составом.

Число размещений из n элементов по k обозначают A_n .

Первый элемент можно выбрать n способами, второй $n-1$ и последний k -й элемент $n-(k-1)$ способами.

$$A_n = n(n-1)(n-2) \dots (n-(k-1))$$

Задачи:

1. *Учащиеся одного класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предметов.*

Решение: Расписание на один день отличаются либо порядком следования предметов, либо самими предметами. Значит, здесь речь идет о размещении из 8 элементов по 4.

$$A_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680 \quad \text{Ответ: } 1680 \text{ способов.}$$

2. *Сколькими способами тренер может распределить 10 спортсменов, на эстафете 4·100 на первом, во втором, третьем и четвертом этапах?*

Решение: $A_{10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ Ответ: 50400 способов.

3. *Сколько существует пятизначных телефонных номеров, в каждом из которых все цифры различны и первая цифра различна от нуля?*

Решение: Число размещений из десяти элементов по пять – A_{10} . Число размещений начинающихся с цифры ноль – A_9 . Число телефонных номеров равно:

$$A_{10} - A_9 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216 \quad \text{Ответ: } 27216 \text{ номеров.}$$

5. Сочетания

Задача: На столе лежат 5 разноцветных карандашей. Сколько способов для выбора 3 из них?

Решение: Обозначим карандаши буквами а, в, с, d, е. Можно составить такие сочетания: авс, авd, аbe, асd, асе, аде, bcd, bce, bed, cde.

Всего: 10 способов.

Определение: Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов.

Число сочетаний из n элементов по k обозначается C_n .

В сочетаниях не имеет значения порядок элементов, сочетания отличаются составом элементов.

Допустим, имеется множество, содержащее n элементов, и из его элементов составлены всевозможные сочетания по k элементов. Число таких сочетаний равно C_n . В каждом сочетании можно выполнить P_k перестановок. В результате мы получим все размещения, которые можно составить из n элементов по k . Их число равно A_n .

Значит, $A_n = C_n \cdot P_k$. Отсюда $C_n = \frac{A_n}{P_k}$

$$C_n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

Умножим числитель и знаменатель, на $(n-k)!$

$$C_n = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))(n-k)!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Задачи:

1. Из 12 учеников нужно выбрать 3 ученика на улусный новогодний бал. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение: Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним учеником. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 12 элементов по 3:

$$C_{12} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9} = 220 \quad \text{Ответ: 220 способов}$$

2. В классе 10 девочек и 8 мальчиков. Нужно выбрать троих дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор, если:

а) среди них должен быть 1 мальчик;

б) это могут быть любые 3 ученика?

Решение: а) выбрать одного мальчика можно C_8 способами

$$C_8 = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8}{1! \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} = 8$$

Выбрать из 10 девочек 2 дежурных можно C_{10} способами

$$C_{10} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8} = 45$$

Способов из 3 дежурных, среди которых 1 мальчик, всего:

$$C_8 \cdot C_{10} = 8 \cdot 45 = 360 \quad \text{Ответ: 360 способов.}$$

б) любых 3 учеников из 18 учащихся можно выбрать

$$C_{18} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 15} = 816 \quad \text{Ответ: 816 способов.}$$

3. В корзине имеются 15 груш и 7 яблок. Нужно выбрать 5 груш и 3 яблока. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Способов выбора 5 груш:

$$C_{15} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10} = 360360 = 3003$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 10 = 120$$

Способов выбора 3 яблок:

$$C_7 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 35$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Всего указанный выбор можно сделать $C_{15} \cdot C_7$ способами:

$$C_{15} \cdot C_7 = 3003 \cdot 35 = 105105$$

Ответ: 105105 способов.

ЗАДАЧИ

1. Сколькими способами можно расставить в ряд на одной полке 7 книг?
2. Сколькими способами можно выбрать трех человек на 3 различные должности из восьми кандидатов?
3. Из 11 футболистов нужно делегировать 3 человека. Сколькими способами это можно сделать?
4. Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?
5. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?
6. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7 различных цветов?
7. На соревнованиях по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменов. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4 по 100 м на первом, втором, третьем и четвертом этапах?
8. Сколькими способами могут быть распределены первая, вторая и третья премии между 15 участниками конкурса?
9. Сколькими способами 6 учеников, сдающих зачет, могут занять места в кабинете, в котором стоят 20 одноместных столов?
10. Сколько четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр:
а) 1, 3, 5, 7, 9; б) 0, 2, 4, 6, 8.
11. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различные и первая цифра отличная от нуля?
12. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?
13. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуются прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?
14. Из лаборатории в которой работают заведующий и 10 сотрудников, надо отправить 5 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если: а) заведующий лабораторией должен ехать в командировку; б) заведующий лабораторией должен остаться?
15. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории требуется выделить 4 мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?
16. В библиотеке читателю предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами он может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?
17. Для ремонта школы прибыла бригада, состоящая из 12 человек. Трех из них надо отправить на четвертый этаж, а четырех - на пятый этаж. Сколькими способами это можно сделать?
18. В отделе работают 5 ведущих и 8 старших научных сотрудников. В командировку надо послать двух ведущих и трех старших научных сотрудников. Сколькими способами может быть сделан выбор сотрудников, которых надо послать в командировку?
19. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов, и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки.
 - а) сколько встреч было между футболистами?
 - б) сколько встреч было между хоккеистами?
 - в) сколько встреч было между футболистами и хоккеистами?
 - г) сколько встреч было всего?

20. Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом. Известно, что рукопожатий было от 60 до 70. Сколько человек встретились, если известно, что:
- каждый здоровался с каждым;
 - только один человек не здоровался ни с кем;
 - только двое не поздоровались между собой.
21. В классе 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выбрать двух дежурных по классу. Сколькими способами это можно сделать: а) при условии, что пару обязательно должны составить мальчик и девочка? б) без указанного условия?
22. В оперном театре 10 певцов и 8 певиц, а в опере по замыслу композитора 5 мужских и 3 женских партии. Сколько существует различных певческих составов для спектакля, если известно, что:
- все певицы и певцы прекрасно ладят между собой;
 - певцы А и Б ни за что не будут петь вместе;
 - 6 певцов накануне сорвал голос на футболе, и одной певице придется петь мужскую партию.
23. В шахматном кружке занимаются 16 человек. Сколькими способами тренер может выбрать из них для предстоящего турнира:
- команду из 4 человек;
 - команду из четырех человек, указав при этом, кто из членов команды будет играть на первой, второй, третьей и четвертой досках?
24. Сколькими способами из класса, где учатся 24 учащихся, можно выбрать:
- двух дежурных;
 - старосту и помощника старосты.
25. Из 20 вопросов к экзамену Вова 12 вопросов выучил, 5 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то нет. На экзамене в билете будет три вопроса.
- сколько существует вариантов билетов?
 - сколько из них тех, в которых Вова знает все вопросы?
 - сколько из них тех в которых есть вопросы всех трех типов?

Тесты по комбинаторике и теории вероятности

Вариант 1.

- Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?
 - 30
 - 100
 - 120
 - 5
- В 9«Б» классе 32 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?
 - 128
 - 35960
 - 36
 - 46788
- Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?
 - 10
 - 60
 - 20
 - 30
- Вычислить: $6! - 5!$
 - 600
 - 300
 - 1
 - 1000
- В ящике находится 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли 2 не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик будет белым?
 - $\frac{11}{22}$
 - $\frac{11}{25}$
 - $\frac{70}{22}$
 - $\frac{11}{22}$

5. Какова вероятность, что при одном броске игрального кубика выпадает число очков, равное четному числу?

- 1) $\frac{1}{6}$ 2) 0,5 3) $\frac{1}{3}$ 4) 0,25

6. Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку, составляет 60%, а вероятность ошибки у Ани составляет 40%. Найти вероятность того, что обе девочки напишут диктант без ошибок.

- 1) 0,25 2) 0,4 3) 0,48 4) 0,2

7. Завод выпускает 15% продукции высшего сорта, 25% - первого сорта, 40% - второго сорта, а все остальное – брак. Найти вероятность того, что выбранное изделие не будет бракованным.

- 1) 0,8 2) 0,1 3) 0,015 4) 0,35

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	1	2	4	3	2	4	1

Вариант 4

1. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 5 человек?

- 1) 5 2) 120 3) 25 4) 100

2. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

- 1) 12650 2) 100 3) 75 4) 10000

3. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых нечетные и различные.

- 1) 120 2) 30 3) 50 4) 60

4. Упростите выражение: $\frac{11 \cdot 11 \cdot 11}{11 \cdot 11 \cdot 11}$

- 1) 0,5 2) $\frac{11 \cdot 11}{11}$ 3) $n^3 - n$ 4) $n^2 - 1$

5. Какова вероятность, что ребенок родится 7 числа?

- 1) $\frac{1}{30}$ 2) $\frac{1}{12}$ 3) $\frac{1}{31}$ 4) $\frac{1}{365}$

6. Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем попадания первого стрелка составляет 90%, второго – 80%, третьего – 70%. Найдите вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень?

- 1) 0,504 2) 0,006 3) 0,5 4) 0,3

7. Из 30 учеников спорткласса, 11 занимается футболом, 6 – волейболом, 8 – бегом, а остальные прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса занимается игровым видом спорта?

- 1) $\frac{11}{30}$ 2) 0,5 3) $\frac{20}{30}$ 4) $\frac{17}{30}$

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	1	4	3	2	1	1

Вариант 5

1. Сколько существует вариантов рассаживания 6 гостей на 6 стульях?

- 1) 36 2) 180 3) 720 4) 300

2. Аня решила сварить компот из фруктов 2-ух видов. Сколько различных вариантов (по сочетанию фруктов) компотов может сварить Аня, если у нее имеется 7 видов фруктов?

№ от- вета	3	1	2	3	1	2	1
---------------	---	---	---	---	---	---	---

Вариант 7

- В корзине лежит: яблоко, апельсин, грейпфрут и манго. Сколькими способами 4 девочки могут поделить фрукты? (одной девочке один фрукт)
 - 4
 - 24
 - 20
 - 16
- На плоскости расположены 25 точек так, что три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
 - 75
 - 100
 - 2300
 - 3000
- В теннисном турнире участвуют 10 спортсменов. Сколькими способами теннисисты могут завоевать золото, серебро и бронзу?
 - 600
 - 100
 - 300
 - 720
- Вычислите: $\frac{4}{n} \cdot A^4_8$
 - 1
 - 13
 - 12
 - 32
- Случайным образом открывается учебник литературы и находится второе слово на странице. Какова вероятность того, что это слово начинается на букву л?
 - $\frac{1}{22}$
 - $\frac{1}{21}$
 - $\frac{10}{22}$
 - $\frac{10}{21}$
- Вступительный экзамен в лицей состоит из трех туров. Вероятность отсева в 1 туре составляет 60%, во втором - 40%, в третьем - 30%. Какова вероятность поступления в лицей?
 - 0,24
 - 0,12
 - 0,18
 - 0,072
- В коробке лежат 4 голубых, 3 красных, 9 зеленых, 6 желтых шариков. Какова вероятность того, что выбранный шарик будет не зеленым?
 - $\frac{10}{22}$
 - 0,5
 - $\frac{10}{21}$
 - $\frac{10}{22}$

№ за- дания	1	2	3	4	5	6	7
№ от- вета	2	3	4	1	2	3	1

Вариант 8

- Разложите на простые множители число 30. Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число 30?
 - 6
 - 12
 - 30
 - 3
- Сколько можно составить из простых делителей числа 2730 составных чисел, имеющих только два простых делителя?
 - 300
 - 10
 - 150
 - 15
- На плоскости даны 8 точек, причем три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует векторов с началом и концом в любых двух из данных точек?
 - 18
 - 28
 - 64
 - 56
- Вычислите: $C^6_8 \cdot P_2$
 - 48
 - 94
 - 56
 - 96
- Катя забыла последнюю цифру семизначного номера телефона знакомой девочки. Какова вероятность того, что Катя набрала телефон знакомой девочки?
 - 0,5
 - 0,1
 - $\frac{1}{7}$
 - 0,7
- Три выключателя соединены параллельно. Вероятность выхода из строя первого выключателя равна 3%, второго - 4%, третьего - 1%. Какова вероятность того, что цепь будет разомкнута?
 - 12
 - 0,5
 - 0,12
 - $12 \cdot 10^{-6}$

7. На экзамене по математике для усиления контроля класс из 35 учащихся рассадили в три аудитории. В первую посадили 10 человек, во вторую – 12, в третью – остальных. Какова вероятность того, что два друга окажутся в одной аудитории?

- 1) $\frac{100}{200}$ 2) 0,5 3) $\frac{100}{200}$ 4) $\frac{100}{200}$

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	1	2	4	3	2	4	1

Вариант 9

1. Сколькими способами можно закрасить 6 клеток так, чтобы 2 клетки были закрашены красным цветом, а 4 другие – белым, черным, зеленым и синим? (каждый своим цветом).

- 1) 120 2) 360 3) 180 4) 500

2. Сколькими способами можно группу из 17 учащихся разделить на 2 группы так, чтобы в одной группе было 5 человек, а в другой – 12 человек.

- 1) 60 2) 85 3) 6188 4) 6000

3. На плоскости даны 10 точек, причем три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует лучей с началом в любой из данных точек, проходящих через любую другую из данных точек?

- 1) 720 2) 360 3) 500 4) 100

4. Решите уравнение: $A^{2x+1} = 20$

- 1) 4; -5 2) 4 3) -5 4) 9

5. В лотерее 1000 билетов, среди которых 20 выигрышных. Приобретается один билет. Какова вероятность того, что этот билет невыигрышный?

- 1) $\frac{1}{1000}$ 2) 0,2 3) $\frac{999}{1000}$ 4) 0,5

6. Отдел технического контроля типографии «Фаворит» проверил книжную продукцию на наличие брака. Вероятность того, что книга не бракованная равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных книг только одна бракованная.

- 1) 0,18 2) 0,81 3) 0,5 4) 0,01

7. 25 выпускников мединститута направили работать в три села. В Хацепеевку попало 7 молодых специалистов, в Хачапуровку – 12, в Красные Огурейцы – остальные. Какова вероятность того, что три друга будут сеять разумное, доброе, вечное в одном селе?

8.

- 1) $\frac{1}{20}$ 2) $\frac{1}{20}$ 3) 0,5 4) 0,35

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	3	1	2	3	1	2

Вариант 10

1. Сколькими способами можно закрасить 6 клеток таким образом, чтобы 3 клетки были красными, а 3 оставшиеся были закрашены (каждая своим цветом) белым, черным и зеленым?

- 1) 180 2) 300 3) 120 4) 240

2. Сколькими способами из 10 игроков волейбольной команды можно выбрать стартовую шестерку?

